

Modélisation de la turbulence : Approche RANS

Par Ibrahim CISSE

Table des matières

1	Modélisation de la turbulence : approche RANS	2
1.1	Introduction générale	2
1.2	Principe de l'approche RANS	2
1.3	Propriétés de la moyenne	2
1.4	Équations de Navier–Stokes moyennées	4
1.5	Le terme clé : les contraintes de Reynolds	5
1.6	Problème de fermeture	5
1.7	Hypothèse de Boussinesq	5
2	Modèles de turbulence RANS	5
2.1	Modèles à une équation : Spalart–Allmaras	6
2.2	Modèles à deux équations : le modèle $k-\varepsilon$	6
2.3	Modèle $k-\omega$	7
2.4	Modèle hybride : $k-\omega$ SST	8
2.5	Modèles de contraintes de Reynolds (RSM)	8
2.6	Limites de l'approche RANS	8

1 Modélisation de la turbulence : approche RANS

1.1 Introduction générale

Les écoulements turbulents sont caractérisés par des fluctuations rapides et désordonnées de vitesse et de pression. La résolution de toutes les échelles turbulentes nécessite une résolution extrêmement fine en espace et en temps, donc une puissance de calcul énorme. Il convient donc de trouver des approches plus accessibles, la connaissance du détail de l'écoulement n'étant pas toujours recherché surtout en ingénierie.

1.2 Principe de l'approche RANS

L'idée fondamentale est de séparer les champs dynamiques de l'écoulement (vitesse, pression, etc.) en deux parties :

- une partie **moyenne** (l'écoulement “moyen” ou “lentement variable”),
- une partie **fluctuante** (les variations rapides).

Pour une grandeur quelconque ϕ , on écrit :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \overline{\phi}(\mathbf{x}) + \phi'(\mathbf{x}, t)$$

où :

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\mathbf{x}, t') dt'$$

est la **moyenne temporelle** (ou d'ensemble), et ϕ' est la **fluctuation turbulente** autour de cette moyenne.

Ainsi pour la vitesse, on a :

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i$$

Cette décomposition est appelée **décomposition de Reynolds**. NB : D'autres types de moyenne existent, la moyenne temporelle est cependant plus facile à mettre en oeuvre expérimentalement.

1.3 Propriétés de la moyenne

Soit une grandeur instantanée $\phi(\mathbf{x}, t)$, que l'on décompose en :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \overline{\phi}(\mathbf{x}) + \phi'(\mathbf{x}, t)$$

où :

- $\overline{\phi}$ est la **valeur moyenne**,
- ϕ' est la **fluctuation turbulente**

La moyenne (temporelle, par exemple) est définie par :

$$\overline{\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(t) dt$$

Propriétés de linéarité

Pour deux grandeurs ϕ et ψ , et deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\overline{a\phi + b\psi} = a \overline{\phi} + b \overline{\psi}$$

Moyenne d'une constante

$$\overline{C} = C$$

Moyenne d'une fluctuation

$$\overline{\phi'} = 0$$

Moyenne d'un produit

Pour deux grandeurs ϕ et ψ :

$$\overline{\phi\psi} = \overline{\phi}\overline{\psi} + \overline{\phi'\psi'}$$

La dernière quantité $\overline{\phi'\psi'}$ représente la **corrélation turbulente moyenne**.

Moyenne d'une dérivée temporelle

Si le champ est statistiquement stationnaire (régime permanent) :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} = 0$$

Moyenne d'une dérivée spatiale

L'opérateur de moyenne commute avec la dérivation spatiale :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i}$$

Moyenne d'un produit dérivé

Attention : la moyenne d'un produit dérivé ne se simplifie pas nécessairement, car les fluctuations peuvent être corrélées :

$$\overline{\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}} = \overline{\phi} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_i} + \overline{\phi' \frac{\partial \psi'}{\partial x_i}}$$

Produit de dérivées

De même :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}} \neq \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_j}$$

à cause des corrélations entre les gradients fluctuants.

Propriété de moyenne double

Appliquer deux fois la moyenne ne change rien :

$$\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi}$$

Moyenne d'un produit avec fluctuation nulle

Si ϕ' et ψ' sont non corrélées :

$$\overline{\phi' \psi'} = 0$$

ce cas est rare en turbulence réelle, mais utile dans certaines approximations (isotropie, fermeture simple).

1.4 Équations de Navier–Stokes moyennées

Les équations de Navier–Stokes incompressibles sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}$$

En introduisant la décomposition de Reynolds et en tenant compte des propriétés de la moyenne, on obtient les équations de Reynolds (RANS) :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

avec :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0$$

1.5 Le terme clé : les contraintes de Reynolds

Le nouveau terme apparu :

$$-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

provient du produit non linéaire $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ dans les équations de Navier–Stokes.

On définit :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

appelé **tenseur des contraintes de Reynolds**. Il représente les effets moyens des fluctuations turbulentes sur l'écoulement moyen.

1.6 Problème de fermeture

Le nouveau terme $\overline{u'_i u'_j}$ apparu dans les équations RANS rend le système non fermé : il contient plus d'inconnues que d'équations. C'est ce qu'on appelle le **problème de fermeture** de la turbulence.

Pour résoudre les équations RANS, il faut donc modéliser les contraintes de Reynolds à l'aide de relations supplémentaires. C'est le cœur de la **modélisation de la turbulence**.

1.7 Hypothèse de Boussinesq

La première approche (due à Boussinesq, 1877) consiste à supposer une analogie entre le tenseur de contraintes de Reynolds et le tenseur des contraintes d'un fluide newtonien en introduisant un nouveau coefficient appelé viscosité moléculaire :

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

où :

- μ_t est la **viscosité turbulente** (ou viscosité édictive),
- $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur des taux de déformation moyens,
- $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ est l'énergie cinétique turbulente.

Cette hypothèse ferme le système, à condition de disposer d'un modèle pour calculer μ_t .

2 Modèles de turbulence RANS

L'objectif des modèles de turbulence est donc de déterminer ν_t (ou μ_t) à partir d'équations supplémentaires.

2.1 Modèles à une équation : Spalart–Allmaras

Le premier niveau de complexité consiste à résoudre une seule équation pour une grandeur liée à la viscosité turbulente.

Le modèle **Spalart–Allmaras** (1992) introduit une variable de transport $\tilde{\nu}$ liée à la viscosité turbulente :

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$$

L'équation de transport est :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + C_{b2}|\nabla\tilde{\nu}|^2 \right] - \left[C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2}f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

où :

- \tilde{S} est une fonction de la déformation moyenne,
- d est la distance à la paroi,
- les constantes ont été calibrées sur des écoulements expérimentaux de type couche limite.

Domaines d'application :

- Aérodynamique externe (ailes, véhicules),
- Écoulements attachés,
- Calculs stationnaires.

2.2 Modèles à deux équations : le modèle k - ε

Le modèle k - ε est le plus répandu en ingénierie (Launder & Spalding, 1972). Il repose sur deux équations de transport : - pour l'énergie cinétique turbulente k , - et pour son taux de dissipation ε .

Équations du modèle

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_k = 2\nu_t \overline{S_{ij}S_{ij}}$$

Constantes et calibrations

Les valeurs standards proviennent de mesures en couche limite turbulente :

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Ces constantes ont été ajustées à partir d'expériences de turbulence homogène et de jets libres.

Utilisation et limites

Avantages :

- Modèle universel et robuste pour la plupart des écoulements pleinement turbulents.
- Calibré sur de nombreux cas expérimentaux.

Limites :

- Peu précis près des parois (où la turbulence est anisotrope et faiblement dissipée).
- Mauvaise prédiction des zones de recirculation ou de séparation.

Applications : jets, diffuseurs, écoulements internes, canaux.

2.3 Modèle k - ω

Proposé par Wilcox (1988), ce modèle utilise : - k : énergie cinétique turbulente, - ω : pulsation spécifique ($\omega = \varepsilon/(C_\mu k)$).

Équations

$$\begin{aligned}\frac{Dk}{Dt} &= P_k - \beta^* k \omega + \nabla \cdot [(\nu + \sigma^* \nu_t) \nabla k] \\ \frac{D\omega}{Dt} &= \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \nabla \cdot [(\nu + \sigma \nu_t) \nabla \omega]\end{aligned}$$

avec :

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}$$

Constantes (modèle standard)

$$\alpha = \frac{5}{9}, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \beta^* = 0.09, \quad \sigma = 2, \quad \sigma^* = 2$$

Avantages :

- Très bon comportement près des parois.
- Plus précis que k - ε pour les gradients de vitesse forts.

Limites :

- Sensible aux conditions aux limites de ω .
- Moins robuste pour les écoulements libres.

Applications : couches limites, conduits, écoulements internes, aéronautique.

2.4 Modèle hybride : k - ω SST

Le modèle **SST (Shear Stress Transport)** proposé par Menter (1994) combine le meilleur des deux mondes : - k - ω près des parois, - k - ε dans les zones libres.

Un facteur de mélange assure une transition douce entre les deux formulations.

Avantages :

- Très bon compromis entre précision et robustesse.
- Excellente prédiction des séparations modérées.

Applications : aérodynamique externe, turbines, échangeurs, profils d'aile.

2.5 Modèles de contraintes de Reynolds (RSM)

Ces modèles (Reynolds Stress Models) abandonnent l'hypothèse de Boussinesq et résolvent directement les équations de transport pour chaque composante de $\overline{u'_i u'_j}$:

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij}$$

Chaque terme correspond respectivement à :

- P_{ij} : production par cisaillement,
- Φ_{ij} : corrélation pression-vitesse,
- ε_{ij} : dissipation visqueuse,
- D_{ij} : diffusion turbulente.

Avantages :

- Représentation complète de l'anisotropie de la turbulence.
- Précis pour les écoulements complexes (recirculation, rotation, jets croisés...).

Inconvénients :

- Très coûteux numériquement (6 équations supplémentaires).
- Plus instable et plus difficile à calibrer.

Applications : simulations avancées, recherche, jets turbulents anisotropes, courbures fortes.

2.6 Limites de l'approche RANS

- Les effets instationnaires et tridimensionnels complexes sont souvent mal capturés (vortex, détachements, jets oscillants).
- La qualité des résultats dépend fortement du modèle de turbulence choisi et de ses coefficients.
- RANS ne décrit pas la dynamique instantanée de la turbulence.